Affine Lie環のIntegrable表現にassociateしたP^{1}上のConformal Field Theory

AUTHOR(S):

土屋, 昭博; 松尾, 厚

CITATION:

土屋, 昭博 ...[et al]. Affine Lie環のIntegrable表現にassociateしたP^{1}上のConformal Field Theory. 数理解析研究所講究録 1989, 702: 1-24

ISSUE DATE:

1989-09

URL:

http://hdl.handle.net/2433/101575

数理解析研究所講究録
702巻 1989年 1-24

Affine Lie 環の Integrable 表現に associate した P^1 上の Conformal Field Theory

名大・理　土屋 昭博　述

京大・数研　松尾　厚　記

§0　はじめに

このノートは，Tsuchiya-Kanie ［TK］の結果に基づく，土屋氏の講義の記録である．［TK］は，P^1上の Conformal Field Theory （CFT）において，あいまいであった Vertex Operator （Primary Field）の概念を数学的に厳密に取り扱うことに成功し，また，Braid群のモノドロミー表現や Fusion Rules などについての具体的結果を得た論文である．

まず，2次元のCFTの基本的な論文［BPZ］［KZ］の内容のうち，［TK］の背景をなす点について必要最小限の事を簡単に説明する．個々の論文の詳しい物理的意味については，述べられない．

CFTの出発点となったのが［BPZ］である．この論文では，z，$\bar{z}\in\mathbb{C}$に対して，conformal 変換$z\to\zeta$，$\bar{z}\to\bar{\zeta}$ によって

$$\phi(z,\bar{z})\to\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)^{\Delta}\left(\frac{d\bar{\zeta}}{d\bar{z}}\right)^{\bar{\Delta}}\phi(\zeta,\bar{\zeta})\qquad \Delta,\ \bar{\Delta}\in\mathbb{C}$$

と変換する”Primary Field” $\phi(z,\bar{z})$ を考えている．$\Delta,\bar{\Delta}$をϕの Conformal dimension と呼ぶ．この変換則はVirasoro代数の生成元 L_m との交換関係

$$(¥)\qquad [L_m\ \phi(z)]=z^{m+1}\frac{\partial}{\partial z}\phi(z)+\Delta\ (m+1)z^{m}\ \phi(z)$$

と同値である（$\bar{z}$依存性は無視している）．ここで，Virasoro代数とは，

$$[L_n,\ L_m]=(n-m)L_{n+m}+\frac{c}{12}(n^3-n)\ \delta_{n+m,0}$$

なる交換関係をみたす Operator L_m で生成される無限次元のLie環であって，Conformal変換群のLie環の中心拡大として得られる．これが，CFTの名前の由来である．ここで，$c\in\mathbb{C}$は理論をつくる Parameter であって，Virasoro Central Charge と呼ばれる．

2

さて，［ＢＰＺ］では，このような Primary Field $\phi(z,\bar{z})$ に Virasoro代数の作用を定義する事によって，理論をかたちづくる Fields 全体を得ている．こうして得られる Fields のＮ点相関関数$<\phi_1\cdots\phi_N>$を計算せよ，というのがＣＦＴの基本的な問題設定である．

一方，［ＫＺ］では，菅原構成によって Virasoro代数の生成元（を成分とする Stress-Energy Tensor）が Current の２次式で書かれるという事実を背景として，Conformal変換群のみならず，Lie環（Non-Abelian Current，ゲージ群）の作用をもつような Primary Field を考えている．これは［ＢＰＺ］の一般論の特別な場合になっているが，より取り扱い易い理論になっている（Wess-Zumino-Witten Modelという）．この場合，相関関数は Knizhnik-Zamolodchikov 方程式（ＫＺ方程式）と呼ばれる微分方程式を満たしている．この方程式は，Conformal変換に対する Ward-高橋恒等式に由来する．

これらは物理の論文であって，Field Operator がどのような空間に作用するのか明確ではない．また，Field はあくまで実２次元時空の座標(x,y)上で定義されているものとみなされねばならない．従って，$z=x+yi$，$\bar{z}=x-yi$の両方に依存すると考えることが不可欠なのである．さらに，zに依存する量と$\bar{z}$に依存する量をあわせて物理的に意味のある量が得られるかどうかという問題（Unitarity の問題という）も避けて通ることはできない．しかし，［ＴＫ］では，［ＫＺ］をもとにして Operator Theory を数学的に厳密に構成するという立場にたち，zのみに依存する Field を考えている（Chiralな理論）．すなわち，［ＴＫ］は，Affine Lie環の表現論をもとに，表現空間を Intertwine する Operator として Vertex Operator を厳密に定義し，その存在条件を与えた．また，ＫＺ方程式を含む方程式系によって相関関数を特徴付けることに成功した．ここで，ＫＺ方程式が確定特異点型であることが極めて重要な役割を果たしている．なお，Vertex Operator という言葉は，かつての Dual Resonance Model（のちの String Model）に由来する．実際 Dual Resonance Model に現われる Vertex Operator は交換関係(¥)を満たしている．最近では［ＴＫ］の Vertex Operator は Chiral Vertex Operator と呼ばれている．

以上の成果に基づいて［ＴＫ］は，Vertex Operators の合成と交換関係を通じて Braiding を定義した．ここでも，ＫＺ方程式が重要な役割を果たしている．特別な場合には，具体的な計算を実行し，これによって得られる Braid群 B_N のモノドロミー表現が Hecke環の表現を与えることを示している．また，特別な場合に，Fusion Rule に関する具体的結果も得ている．セミナーでは，これらの具体的計算を蟹江氏が詳しく説明されたが，ここでは述べられない．本巻所載の蟹江氏の論説を参照されたい．

このノートでは，わずかな記号の変更と若干の割愛（及びこの”はじめに”）の他は土屋氏の講義にほぼ忠実に従って記述した．これは，証明をつけ加えるといった気を利かす能力が筆記者に備わっていないからに過ぎない．

なお，［ＴＫ］では$g=sl(2,\mathbb{C})$の場合のみ扱っている．具体的な計算はともかく，理論の定式化は，gが一般の単純 Lie 環の場合に容易に拡張される．このノートでも，単純 Lie 環の場合を扱っている．また，P^1から一般の Riemann 面への拡張が［ＴＵＹ］により与えられた．この内容は，本巻所載の上野氏の講義録のなかで紹介されているが，その中で［ＴＫ］との関係についても触れているので参照されたい．

目　次

4

§1　Affine Lie環の表現と Vertex Operators

1-1　Affine Lie環の表現

ここでは Affine Lie環の表現に関する記号をまとめておく．（本巻所載の上野氏の講義録を参照せよ．標準的な教科書として［K］がある．）

g を $\mathbb{C}$ 上の単純 Lie環とし，$\dim g = D$ とする．ルート分解及び単純ルートを固定する．非退化な不変内積 $(\ ,\ ) : g \times g \longrightarrow \mathbb{C}$ が存在する．ただし，極大ルート θ に対して $(\theta, \theta) = 2$ と正規化したものとする．これによって，g と g^* を同一視する．このとき，

$$P_+ := \text{dominant integral weights の集合}$$

$$P_l := \{\lambda \in P_+ ; 0 \leqq (\lambda, \theta) \leqq l\}$$

と定義する．P_l は有限集合である．

次に，$\hat{g} = g \otimes \mathbb{C}[\xi, \xi^{-1}] \oplus \mathbb{C}c$ を g に付随する Affine Lie環とし，その元を，$X(n) = X \otimes \xi^n$ と表わす．$\hat{g}$ の level l の integrable 表現で，最高ウェイトの classical part が $\lambda \in P_l$ であるものを H_λ と表わす．H_λ は次のような gradation をもつ．

$$H_\lambda = \sum_{d \geqq 0} H_\lambda(d)$$

$$H_\lambda(d) = \sum_{\substack{n_j \geqq 1 \\ n_1 + \cdots + n_k = d}} X_1(-n_1) \cdots X_k(-n_k) H_\lambda(0)$$

$$H_\lambda(0) = \{v \in H_\lambda ; \text{任意の} X \in g,\ n \geqq 1 \text{ に対して，} X(n)v = 0\}$$

ここで，$H_\lambda(0)$ は最高ウェイトが λ の既約 g-加群になる．これを，以下では V_λ と表わす．また，$v \in H_\lambda$ は $H_\lambda(d)$ に属するとき $\deg v = d$ と書く．

1-2　表現に作用する Operators

固定された $l \geqq 1$ に対して，$H = \sum_{\lambda \in P_l} H_\lambda$ に作用する operator とは，線形写像 $A : H \longrightarrow \hat{H}$ のことである．ここで，$\hat{H}$ は，H の完備化 $\hat{H} = \sum_{\lambda \in P_l} \prod_{d \geqq 0} H_\lambda(d)$ を表わす．

この定義は，次のように言い替えることもできる．すなわち，右 $\hat{g}$ 加群 H^+ を

$$H^{+}=\sum_{\lambda\in P_{l}}H^{+}_{\lambda}$$

$$H^{+}_{\lambda}=\sum_{d\geqq 0}\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(H_{\lambda}(d),\ \mathbb{C})$$

で定義し，$<\ |\ >:H^{+}_{\lambda}\times H_{\lambda}\longrightarrow\mathbb{C}$ を Canonical Pairing とするとき，H上の Operator A を与えることと，双線形写像 $<\ \ |A|\ \ >:H^{+}_{\lambda}\times H_{\lambda}\longrightarrow\mathbb{C}$ であって，
$<v|A|u>=<v|Au>$ を満たすものを与えることは同値である．
（ただし，Canonical Pairing $<\ |\ >$ は $H^{+}_{\lambda}\times\hat{H}_{\lambda}$ 上で意味をもつ事に注意せよ）

例 $X\in g$, $z\in\mathbb{C}^{*}$ に対して

$$X(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}X(n)z^{-n-1}:H\longrightarrow\hat{H}$$

はH上の Operator である．X(z)は Current と呼ばれる．また，

$$T(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}L(n)z^{-n-2}$$

$$L(n)=\frac{1}{2(l+g^{*})}\sum_{j=1}^{D}\sum_{m\in\mathbb{Z}}:X^{j}(m)X^{j}(n-m):$$

はH上の Operator である．ただし，$X^{1},\cdots,X^{D}$ は g の正規直交基底であり，: : は **Normal Ordering**

$$:X(m)Y(n):=\begin{cases}X(m)Y(n) & (n>m)\\ \frac{1}{2}\{X(m)Y(n)+Y(n)X(m)\} & (n=m)\\ Y(n)X(m) & (n<m)\end{cases}$$

を表わす．また，g^{*} は g の dual Coxeter 数である．

T(z) は **Energy-Momentum Tensor (Stress-Energy Tensor)** と呼ばれる．

L(n)とX(m)の間には，つぎの交換関係がある．

$$[L(n),\ X(m)]=-mX(n+m)$$

また，L(n)はいわゆる Virasoro 代数を生成する．

$$[L(n),\ L(m)]=(n-m)L(n+m)+\frac{c_{v}}{12}(n^{3}-n)$$

ただし，

$$C_v = \frac{lD}{(l+g^*)}$$

$X(n)$，$L(n)$ は，gradation $H_\lambda = \sum_{d \geqq 0} H_\lambda(d)$ を保つ．

1-3 Vertex Operators

Vertex Operator を定義する．

定義　Operator $\Phi(u;z) : H \longrightarrow \hat{H}$ は，与えられた $\lambda \in P_l$ に対して以下の(1)～(4)の性質を満たすとき，Vertex Operator という．

(1) $u \in V_\lambda$ について線形である．

(2) 任意の $w \in H$，$v \in H^+$ に対して，$\langle v \mid \Phi(u;z) \mid w \rangle$ は $z \in \mathbb{C}^*$ の多価解析関数である．

(3) 任意の $X \in \mathfrak{g}$，$m \in \mathbb{Z}$ に対して

$$[X(m), \Phi(u;z)] = z^m \Phi(Xu;z)$$

(4) 任意の $m \in \mathbb{Z}$ に対して

$$[L(m), \Phi(u;z)] = z^m \left(z\frac{d}{dz} + (m+1)\Delta_\lambda\right) \Phi(u;z)$$

ここで

$$\Delta_\lambda = \frac{(\lambda, \lambda) + 2(\rho, \lambda)}{2(l+g^*)} \qquad (\rho \text{ は正ルートの和の半分})$$

を Conformal dimension といい，理論を定める重要な不変量である．

次に，Vertex Operator の "Type" について説明する．

ウェイトの組 $v = \begin{pmatrix} & \lambda & \lambda_1 \\ \lambda_2 & & \end{pmatrix}$ $\lambda \in P_+$，$\lambda_1, \lambda_2 \in P_l$ を Vertex という．次のような図で表わすこともある．

$$v = \begin{tikzcd} & \lambda \arrow[d, no head] & \\ \lambda_2 & {} \arrow[l] & \lambda_1 \arrow[l, no head] \end{tikzcd}$$

Vertex Operator $\Phi(u;z)$ が Type v であるとは，$u \in V_{\lambda}$であって，
$\Phi(u;z): H_{\lambda_1} \longrightarrow H_{\lambda_2}$ なる成分のみをもつことである．

定理１　$\Phi(u;z)$を Type v の Vertex Operator とするとき，次の(1)〜(3)が成立する．

(1) $\Phi(u;z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\Phi(u)_k\, z^{-k-\hat{\Delta}(v)}$ ，$\hat{\Delta}(v)=\Delta_{\lambda_1}+\Delta_{\lambda}-\Delta_{\lambda_2}$ と展開できる．
ただし，$\Phi(u)_k$ は，degree $-k$の成分 $\Phi(u)_k: H_{\lambda_1}(n) \to H_{\lambda_2}(n-k)$ である．

(2) 双線形写像$\phi: V_{\lambda}\times V_{\lambda_1} \longrightarrow V_{\lambda_2}$ を

$$<w\,|\,\phi(u,v)>:=<w\,|\,\Phi(u)_0\,|\,v> \quad v\in V_{\lambda_1}, u\in V_{\lambda}, w\in V^{+}_{\lambda_2}$$

により定義するとき，$\Phi(u;z)$はϕによって Unique に決まる．ϕを$\Phi(u;z)$の初期Termとよぶ．

(3) 逆に，$\phi\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\lambda}\otimes V_{\lambda_1}\ ; V_{\lambda_2})$ を与えたとき，ϕを初期Termとする type v の Vertex Operator $\Phi(u;z)$が存在するための必要十分条件は，$\lambda\in P_l$ かつ $\phi\in W_{\lambda_2}{}^{\lambda\lambda_1}$ となることである．ただし，$W_{\lambda_2}{}^{\lambda\lambda_1}$ は次のように定義される$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\lambda}\otimes V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2})$ の部分空間である．

一般に，V_{ν} の最低ウェイトを$-\nu^{+}$ とするとき，添え字の上げ下げを

$$W^{\nu^{+}\mu\lambda}=W_{\nu}{}^{\mu\lambda}$$

で定める．また，極大ルートθに対応する部分 Lie 環 $k_{\theta}\cong sl(2,\mathbb{C})$ をとるとき，V_{ν}のk_{θ}-加群として次元$2k+1$の既約表現に属する成分を$W_{\nu k}$ とかく．このとき

$$W^{\nu\mu\lambda}:=\{\phi\in \mathrm{Hom}_{g}(V_{\nu}\otimes V_{\mu}\otimes V_{\lambda})$$
$$k+j+i>l \text{ ならば } \phi\,|_{W_{\nu k}\otimes W_{\mu j}\otimes_{\lambda i}}=0\ \}$$

と定義する．

1-4 Operator 積展開

今度は，Operators の積を定義する．２つの operators　$A, B : H \longrightarrow \hat{H}$　の積は一般には定義できるとは限らない．一般に，Operator Aを

$$A=\sum_k A(k) \qquad A(k)\text{は degree } -k\text{の成分} : H_{\lambda_1}(n) \to H_{\lambda_2}(n-k)$$

と分解する．

定義　Operators の組(B, A)が合成可能とは，deg v = deg $u-n$　なる任意の$v \in H^+$，$u \in H$，$n \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$\sum_{n_1+n_2=n} |\langle v \mid B(n_2)A(n_1) \mid u\rangle| < \infty \quad (\text{絶対収束})$$

となることをいう．このとき Operators B，Aの積BAを，その degree $-n$ の成分が

$$\sum_{n_1+n_2=n} \langle v \mid B(n_2)A(n_1) \mid u\rangle$$

であるような Operator として定義する．

例　$X, Y \in g$ とするとき，$(X(z), Y(w))$は 領域　$\{|z|>|w|>0\}$　で合成可能であって，このとき，$z=w$ での特異性は次の式で表わされる．

$$X(z)Y(w) = \frac{l\cdot(X, Y)}{(z-w)^2}\,\mathrm{id} + \frac{1}{(z-w)}[X\ Y](w) + (z=w\text{で正則な部分})$$

さらに，$X(z)Y(w)$ は領域$(\mathbb{C}^*)^2-\{z=w\}$ 上に一価正則に接続されて，領域$\{|w|>|z|>0\}$ 上では $Y(w)X(z)$ に一致する．

このように Operators の積の特異性を表わす式を，Operator Product Expansion （ＯＰＥ）という．

上の例を gの正規直交基底 $X^1, \cdots, X^D$ に適用すると，

$$\sum_{j=1}^{D} X^j(z)X^j(w) = \frac{l\cdot(X, Y)}{(z-w)^2}\mathrm{id} + (z=w\text{で正則な部分})$$

を得る．従って，$T(z)$の次のような表示を得る．

$$T(z)=\lim_{w\to z}\left\{\frac{1}{2(l+g^*)}\sum_{j=1}^{D} X^j(z)X^j(w) - \frac{D\,l}{2(l+g^*)}\frac{1}{(z-w)^2}\right\}$$

同様に，次のようなＯＰＥが得られる．

$$T(z)X(w)=\frac{1}{(z-w)^2}X(w)+\frac{1}{(z-w)}\frac{d}{dw}X(w)+(z=w\text{で正則な部分})$$

$$T(z)T(w)=\frac{C_V}{2(z-w)^4}\,id+\frac{2}{(z-w)^2}T(w)+\frac{1}{z-w}\frac{d}{dw}T(w)+(z=w\text{で正則な部分})$$

$$X(z)\Phi(u;w)=\frac{1}{z-w}\Phi(Xu;w)+(z=w\text{で正則な部分})$$

$$T(z)\Phi(u;w)=\frac{\Delta_\lambda}{(z-w)^2}\Phi(u;w)+\frac{1}{z-w}\frac{d}{dw}\Phi(u;w)+(z=w\text{で正則な部分})$$

ここで，$\Phi(u;z)$の多価性により，$X(z)\Phi(u;z)$，$T(z)\Phi(u;z)$も$(\mathbb{C}^*)^2-\{z=w\}$上の多価解析関数になる．

また，同様にして，$X(z)$，$T(z)$，$\Phi(u;z)$を有限個合成したものが然るべき領域で定義される．その際，多価性は$\Phi(u;z)$のみに由来する．

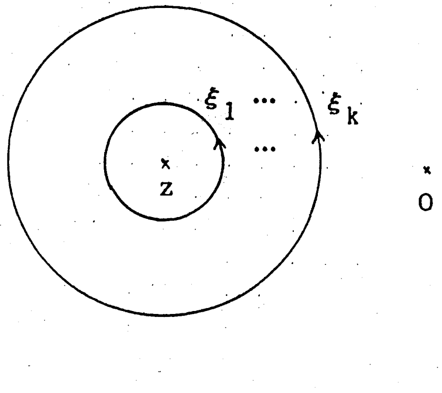
1-5 Vertex Operators の空間への Affine Lie 環の作用

元来，Vertex Operator $\Phi(u;z)$は $u\in V_\lambda$ に対して定義されていたのであるが，この定義を $u\in H_\lambda$ まで拡張することができる．（これを Nuclear Democracy という）

すなわち，$u\in H_\lambda$は，$u=X_k(n_k)\cdots X_1(n_1)u_0$ （$u_0\in V_\lambda$）なる表示をもつので，これを用いて，

$$\langle w\,|\,\Phi(u;z)\,|\,v\rangle=\frac{1}{(2\pi i)^k}\int d\xi_k\cdots\int d\xi_1\,(\xi_k-z)^{n_k}\cdots(\xi_1-z)^{n_1}\langle w\,|\,X_k(\xi_k)\cdots X_1(\xi_1)\Phi(u_0;z)\,|\,v\rangle$$

と定義できる．ただし，積分路は次のようにとる．



この定義は，形式的に次のように表わすことができる．

$$X(w)\Phi(u;z)=\Phi(X(w-z)u;z)$$

この式は，Fusion Rule の最も簡単な場合の式とみなすことができる．

また，Virasoro 代数の生成元 $L(m)$ に対して，

$$\Phi(L(m)u;z)=\frac{1}{(2\pi i)}\int d\xi\,(\xi-z)^{m+1}T(\xi)\Phi(u;z)$$

が成立する．

以上から

$$(\hat{X}(n)\Phi)(u;z):=\Phi(X(n)u;z)$$

$$(\hat{L}(m)\Phi)(u;z):=\Phi(L(m)u;z)$$

と表わすと，

$$(\hat{L}(-1)\Phi)(u;z)=\frac{d}{dz}\Phi(u;z)$$

$$(\hat{X}_\theta(-1)^{l-p-1}\Phi)(u;z)=0 \quad u\in V_\lambda$$

が成立する．ただし，$\{X_\theta, X_{-\theta}, H_\theta\}$ は極大ルート θ に対応する $sl(2,\mathbb{C})$-Triplet であり，

$X_\theta u=0$，$H_\theta u=pu$ とする．

§2 N点関数の従う微分方程式 (Knizhnik-Zamolodchikov 方程式)

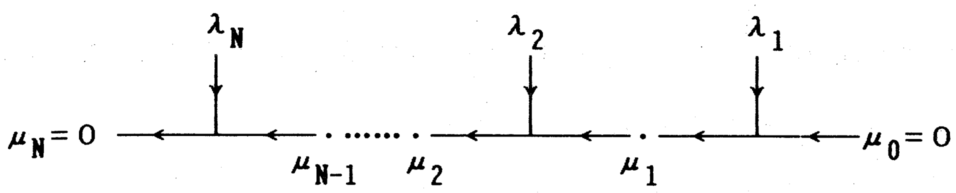
2-1 Vertex Operators のN点関数

まず，$\mathfrak{g}$の自明表現及びその双対表現において，0でないベクトル $|0\rangle \in V_0$, $\langle 0| \in V_0^+$ を固定する．これを，Virasoro Vacuum という．

次に，ウェイトの組 $\lambda_1, \cdots, \lambda_N \in P_l$ をとる．

これに対して，Type が $v_i = \begin{pmatrix} & \lambda_i & \\ \mu_i & & \mu_{i-1} \end{pmatrix}$ の Vertex Operator $\Phi(u_i; z)$ を考える．

ここで，$\vec{\mu} = (\mu_N, \cdots, \mu_0) \in P_l^{N+1}$, $\mu_N = \mu_0 = 0$である．(これを" 中間状態" という)



このとき，形式的べき級数として

$$\langle \Phi_N(u_N; z_N) \cdots \Phi_1(u_1; z_1) \rangle$$

$$= \sum_{p_1, \cdots, p_N} \langle 0 | \Phi_N(u_N)_{p_N} \cdots \Phi_1(u_1)_{p_1} | 0 \rangle z_N^{-p_N - \hat{\Delta}(v_N)} \cdots z_1^{-p_1 - \hat{\Delta}(v_1)}$$

と定義する．

このべき級数は然るべき領域で収束して，$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_{\lambda_N} \otimes \cdots \otimes V_{\lambda_1}, \mathbb{C})$ に値をとる多価解析関数を与える．これは次節の定理2.2(Ⅲ)の確定特異点型の微分方程式（ＫＺ方程式）の形式解になっていることから保証される．実際，領域 $\{(z_1, \cdots, z_N) \in \mathbb{C}^N ; 0 < |z_1| < \cdots < |z_N|\}$ において，$z_1/z_2, \cdots, z_{N-1}/z_N$のべき級数として収束する．さらにこの関数は，領域 $\mathbb{C}^N - \bigcup_{i<j} \{z_i = z_j\}$ まで解析接続され，多価解析関数を定める．

この関数を Vertex Operators のN点関数という．

2-2　N点関数の従う微分方程式

定理２　$\lambda_1,\cdots,\lambda_N \in P_l$ をひとつ固定したとき，上で定義した$\langle \Phi_N(u_N;z_N)\cdots\Phi_1(u_1;z_1)\rangle$ は次の方程式をみたす．

（Ⅰ）（Projective Invariance）　ｍ＝－１，０，１に対して，

$$\sum_{j=1}^{N} z_j^{m}\left(z_j\frac{\partial}{\partial z_j}+(m+1)\Delta_{\lambda_j}\right)\langle \Phi_N(u_N;z_N)\cdots\Phi_1(u_1;z_1)\rangle=0$$

（Ⅱ）（Gauge Invariance）　$X\in g$に対して

$$\sum_{j=1}^{N}\rho_j(X)\langle \Phi_N(u_N;z_N)\cdots\Phi_1(u_1;z_1)\rangle=0$$

ここで，$\rho_j(X)$はN点関数のｊ番目の Vertex Operator にXを作用させることを意味する．

（Ⅲ）（Knizhnik-Zamolodchikov 方程式　以下ＫＺ方程式と略す）

$$\left[(l+g)\frac{\partial}{\partial z_j}-\sum_{k=1}^{N}\frac{\Omega_{jk}}{z_j-z_k}\right]\langle \Phi_N(u_N;z_N)\cdots\Phi_1(u_1;z_1)\rangle=0$$

ここで，$\Omega_{jk}=\sum_{p=1}^{D}\rho_j(X^p)\rho_k(X^p)$ である．

（Ⅳ）（代数方程式）

$j\in 1,\cdots,N$ を固定し，$X_\theta u_j=0$，$H_\theta u_j=p\,u_j$ となるu_jをとると

$$\langle \Phi_N(u_N;z_1)\cdots\Phi_j(X_\theta^{\,l-p+1}u_j;z_j)\cdots\Phi_1(u_1;z_1)\rangle=0$$

が明らかに成立する．これを書き直してN点関数に関する代数方程式が得られる．

注意

ａ）これらの方程式は，係数と解をともにz_k/z_j に関してべき級数展開したかたちで意味をもっていると考える．

ｂ）ＫＺ方程式(Ⅲ)は，完全積分可能である．

ｃ）(Ⅲ)と(Ⅱ)(Ⅳ)はCompatibleである．

ｄ）(Ⅱ)と(Ⅲ)から(Ⅰ)が得られる．

ｅ）Riemann面のFormulationで，真空の空間が$\mathrm{Hom}_g(V_{\lambda_N}\otimes\cdots\otimes V_{\lambda_1},\mathbb{C})$に含まれる条件が

(II)である．その真空を決める方程式（Gauge 条件）が(IV)であり，一方，Moduli を動かしたとき出てくる方程式が(III)のＫＺ方程式である．Moduliといっても，Riemann 面上の Puncture をも同時に考えており，この場合はP^1上で$z_1, \cdots, z_N$を動かす自由度がこれに相当する．（［ＴＵＹ］及び本巻所載の上野氏の講義録を参照せよ）

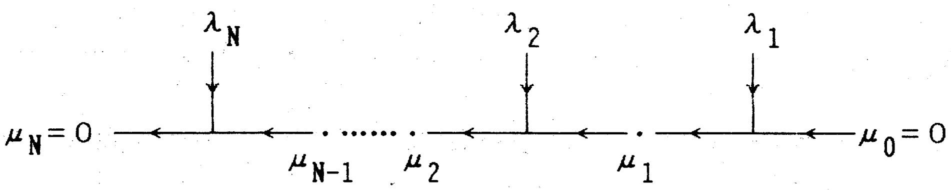
2-3　Ｎ点関数が解空間の基底をなすこと

再び $\lambda_1, \cdots, \lambda_N \in P_l$ を一組固定する．このとき，次の空間を定義する．

$$W_\mu^{\lambda_N \cdots \lambda_1} := \sum_{\vec{\mu}} W_{\mu_N}^{\lambda_N \ \mu_{N-1}} \otimes \cdots \otimes W_{\mu_2}^{\lambda_2 \ \mu_1} \otimes W_{\mu_1}^{\lambda_1 \ \mu_0}$$

$$\subsetneq \mathrm{Hom}_g (V_{\lambda_N} \otimes \cdots \otimes V_{\lambda_1} \otimes V_{\mu_0}, V_{\mu_N})$$

ただし，和は $\vec{\mu} = (\mu_N, \cdots, \mu_0) \in P_l^{N+1}$, $\mu_N = \mu_0 = 0$ を動く．



すると，$\phi_N \otimes \cdots \otimes \phi_1 \in W^{\lambda_N \cdots \lambda_1}$ に対して，$\phi_N, \cdots, \phi_1$ を初期Termとするような Vertex Operators $\Phi_N, \cdots, \Phi_1$ がただ一つ定まり（定理１），これからＮ点関数

$$\langle \Phi_N(u_N ; z_N) \cdots \Phi_1(u_1 ; z_1) \rangle$$

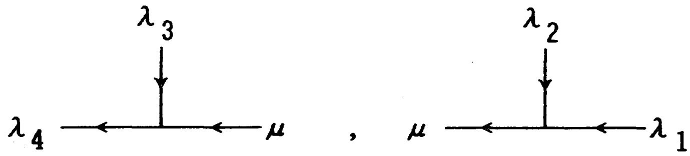
をつくれば，これが方程式(Ｉ)～(IV)の解になる．実は，さらに強く，次の$\mathbb{C}$ベクトル空間としての同型が成立する．

定理３　$W^{\lambda_N \cdots \lambda_1} \xrightarrow{\cong}$ 方程式系(Ｉ)～(IV)の解空間

§3　Braid Relations と Fusion Rules

3-1　Braid Relations

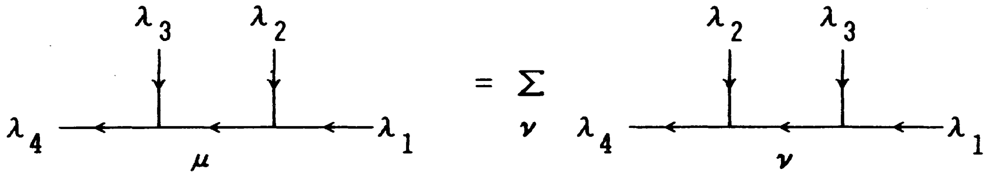
まず，きわめて素朴な説明をする．２つのVertex Operators $\Phi_3(z_3)$，$\Phi_2(z_2)$ を考える．ただし，Typeはそれぞれ



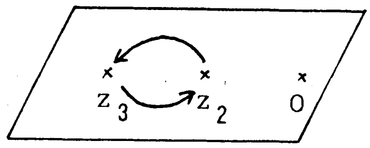
とする．すると，Operators の合成 $\Phi_3(z_3)\Phi_2(z_2)$ は $(z_2, z_3) \in (\mathbb{C}^*)^2 - \{z_2 = z_3\}$ で多価解析関数となる．これを，次のように，(別の)Vertex Operators を反対の順に合成したものの和で書き表す．

$$\Phi_3(z_3)\Phi_2(z_2) = \sum_{\nu} \Psi_2(z_2)\Psi_3(z_3)$$

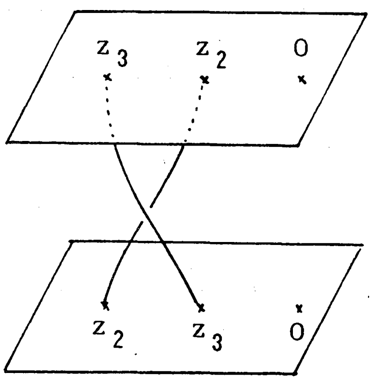
このような，ある種の交換関係を表わす式を考えたい．図で表わせば次のようなことである．



これは，前節の定理をもちいれば，次のように言い表すことができる．Vertex Operators の合成 $\Phi_3(z_3)\Phi_2(z_2)$ は，収束べき級数としては領域 $|z_3|>|z_2|>0$ で定義されている．これを領域 $|z_2|>|z_3|>0$ まで解析接続したものも同じ方程式(Ⅰ)～(Ⅳ)を満たしている．ところで定理によれば，方程式(Ⅰ)～(Ⅳ)の解空間は，（然るべき条件を満たす）Vertex OperatorsのＮ点関数で張られているから，解析接続した関数もその１次結合で表わされるはずである．



　ただし，解析接続する Path を一つ固定するごとに関係式が得られることに注意せよ．ここでは，右図の Path を固定することにする．



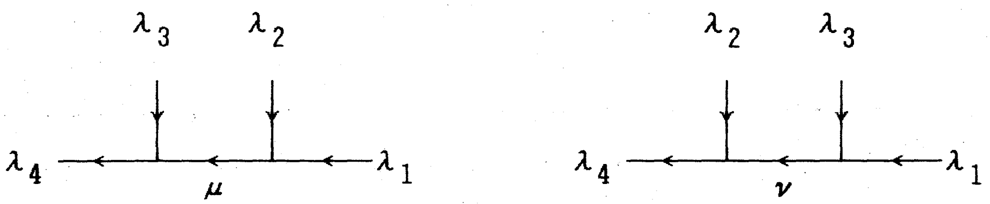
さて，Vertex Operators はその初期Termにより Parametrize されていて，

$$\Phi_3(z_3)\Phi_2(z_2) \longleftrightarrow \phi_3\otimes\phi_2 \in W_{\lambda_4}^{\lambda_3\ \mu} \otimes W_{\mu}^{\lambda_2\ \lambda_1}$$

$$\Psi_2(z_2)\Psi_3(z_3) \longleftrightarrow \psi_2\otimes\psi_3 \in W_{\lambda_4}^{\lambda_2\ \nu} \otimes W_{\nu}^{\lambda_3\ \lambda_1}$$

と対応している．すると，初期Termの空間の間に，ある同型写像

$$B: \sum_{\mu} W_{\lambda_4}^{\lambda_3\ \mu} \otimes W_{\mu}^{\lambda_2\ \lambda_1} \xrightarrow{\cong} \sum_{\nu} W_{\lambda_4}^{\lambda_2\ \nu} \otimes W_{\nu}^{\lambda_3\ \lambda_1}$$



が存在して，次の性質を満たす．すなわち，$\lambda_1 \sim \lambda_4$ を固定してこの同型を行列で表示したものを

$$B_{\mu}^{\ \nu}: W_{\lambda_4}^{\lambda_3\ \mu} \otimes W_{\mu}^{\lambda_2\ \lambda_1} \xrightarrow{\cong} W_{\lambda_4}^{\lambda_2\ \nu} \otimes W_{\nu}^{\lambda_3\ \lambda_1}$$

$$\phi_3\otimes\phi_2 \longrightarrow \sum_{\psi_3,\psi_2} (B_{\mu}^{\ \nu})_{\phi_3\otimes\phi_2}^{\psi_2\otimes\psi_3}\ \psi_2\otimes\psi_3$$

とすると，対応する Vertex Operators の合成が

$$\Phi_3(z_3)\Phi_2(z_2) \longrightarrow \sum_{\psi_3,\psi_2} (B_{\mu}^{\ \nu})_{\phi_3\otimes\phi_2}^{\psi_2\otimes\psi_3}\ \Psi_2(z_2)\ \Psi_3(z_3)$$

と表わされる．

ただし，$(B_{\mu}^{\ \nu})_{\phi_3\otimes\phi_2}^{\psi_2\otimes\psi_3}$ は，$\psi_2\otimes\psi_3$，$\phi_3\otimes\phi_2$ を基底と考えて,行列 $B_{\mu}^{\ \nu}$の行列要素を表わす．この行列Bを Braiding Matrix という．

以上の定義のもとで，Braid Relation といわれる関係式

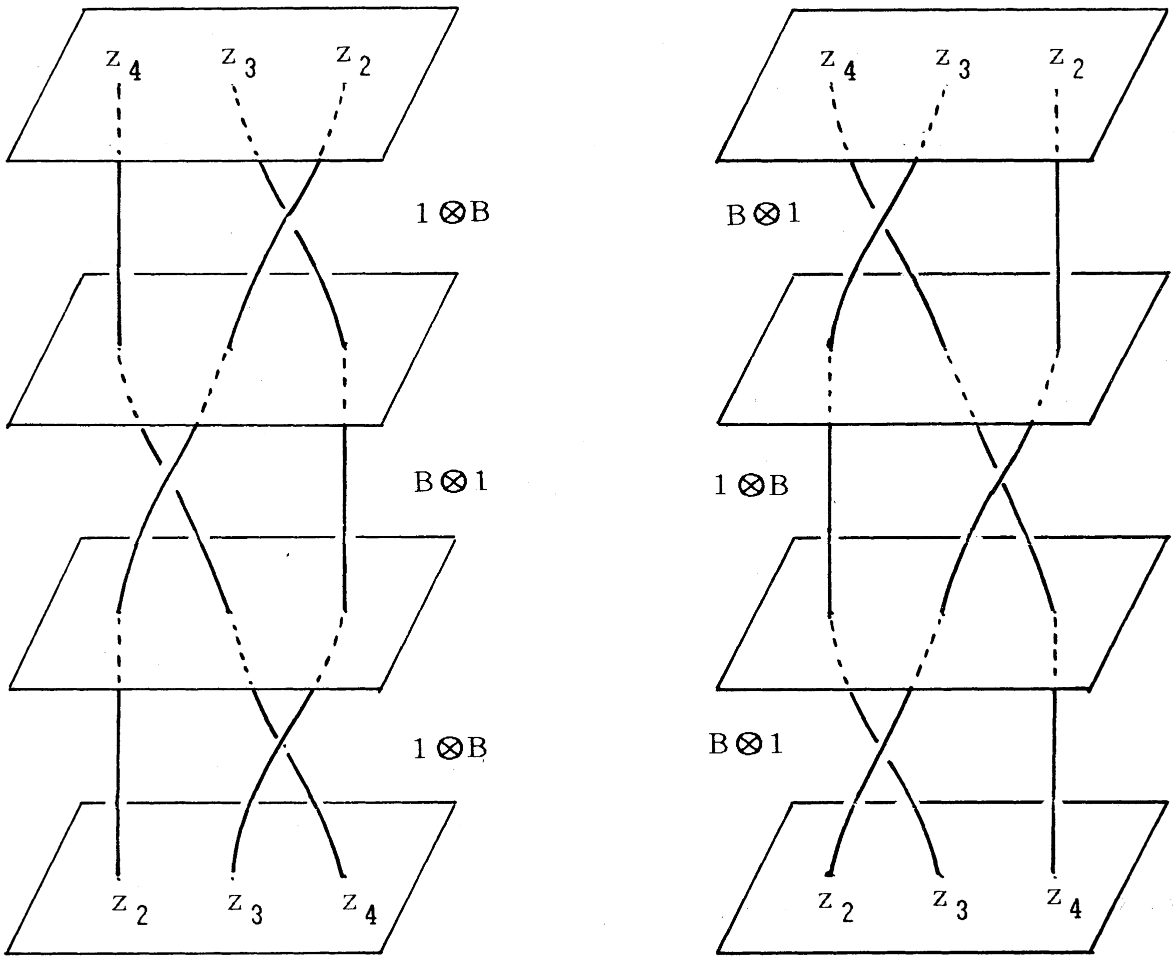
$$(1\otimes B)(B\otimes 1)(1\otimes B)=(B\otimes 1)(1\otimes B)(B\otimes 1)$$

$$:\ \sum_{\mu_2\mu_1} W_{\lambda_5}^{\lambda_4\ \mu_2}\otimes W_{\mu_2}^{\lambda_3\ \mu_1}\otimes W_{\mu_1}^{\lambda_2\ \lambda_1}$$

$$\longrightarrow\qquad \sum_{\nu_2\nu_1} W_{\lambda_5}^{\lambda_2\ \nu_2}\otimes W_{\nu_2}^{\lambda_3\ \nu_1}\otimes W_{\nu_1}^{\lambda_4\ \lambda_1}$$

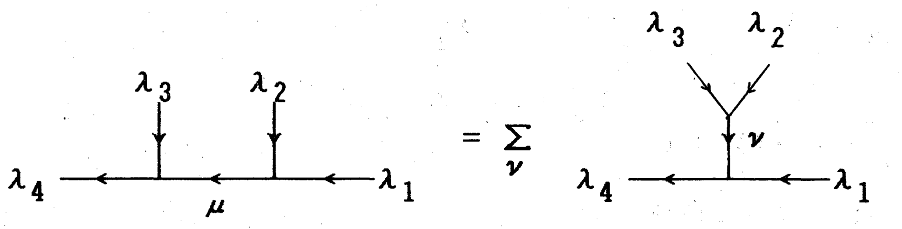
が成立する．

この式は両辺とも解析接続によって得られるものであり，その成立は，解析接続の２つの Path の Homotopy Class が等しいことにほかならない．ただし，解析接続の path は，すべて同じ向きに固定しておく．



3-2 Fusion Rules

今度は，素朴に言って，”Vertex Operators のＯＰＥを All Order で行なうこと”を考える．図で表わせば，次のようになる．



初期Termでの同型写像

$$F : \sum_{\mu} W_{\lambda_4}^{\lambda_3\ \mu} \otimes W_{\mu}^{\lambda_2\ \lambda_1} \xrightarrow{\cong} \sum_{\nu} W_{\lambda_4}^{\nu\ \lambda_1} \otimes W_{\nu}^{\lambda_3\ \lambda_2}$$

$$\phi_3 \otimes \phi_2 \longrightarrow \sum_{\nu, j} \psi_{2j}^{(\nu)} \otimes \psi_{1j}^{(\nu)}$$

を，$z_2 \sim z_3$におけるＯＰＥを用いて定義する．

$$\Phi_3(u_3; z_3)\Phi_2(u_2; z_2)$$

$$= \sum_{\nu, j}(z_3 - z_2)^{-(\Delta_{\lambda_3} + \Delta_{\lambda_2} - \Delta_{\nu})} \{\Psi_{2j}^{(\nu)}(\psi_{1j}^{(\nu)}(u_3 \otimes u_2); z_2) + O(z_3 - z_2; z_2)\}$$

ただし，$|z_3| > |z_2| > 0$という条件を保ち，$|z_3 - z_2|$が小さいとして，変数（$z_3 - z_2$, z_2）に移る．$O(z_3 - z_2; z_2)$は，z_2に depend し，$z_3 - z_2$ について一価正則な関数を表わす．

ここで，$\psi_{1j}^{(\nu)}(u_3 \otimes u_2) \in V_{\nu}$ であることに注意せよ．

3-3　B，Fの関係と Feynmann Diagram 表示

まず，同型写像

$$A_{2,1}\ :\ W_{\lambda_3}^{\lambda_2\ \lambda_1} \longrightarrow W_{\lambda_3}^{\lambda_1\ \lambda_2}$$

を

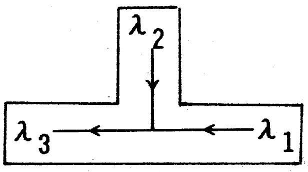
$$A_{2,1} := (1\otimes T)\ e^{-(\triangle_{\lambda_2}+\triangle_{\lambda_1}-\triangle_{\lambda_3})\pi i}$$

で定義する．ただし，Tは置換

$$\begin{array}{ccc} T : V_{\lambda_1}\otimes V_{\lambda_2} & \longrightarrow & V_{\lambda_2}\otimes V_{\lambda_1} \\ v_1\otimes v_2 & & v_2\otimes v_1 \end{array}$$

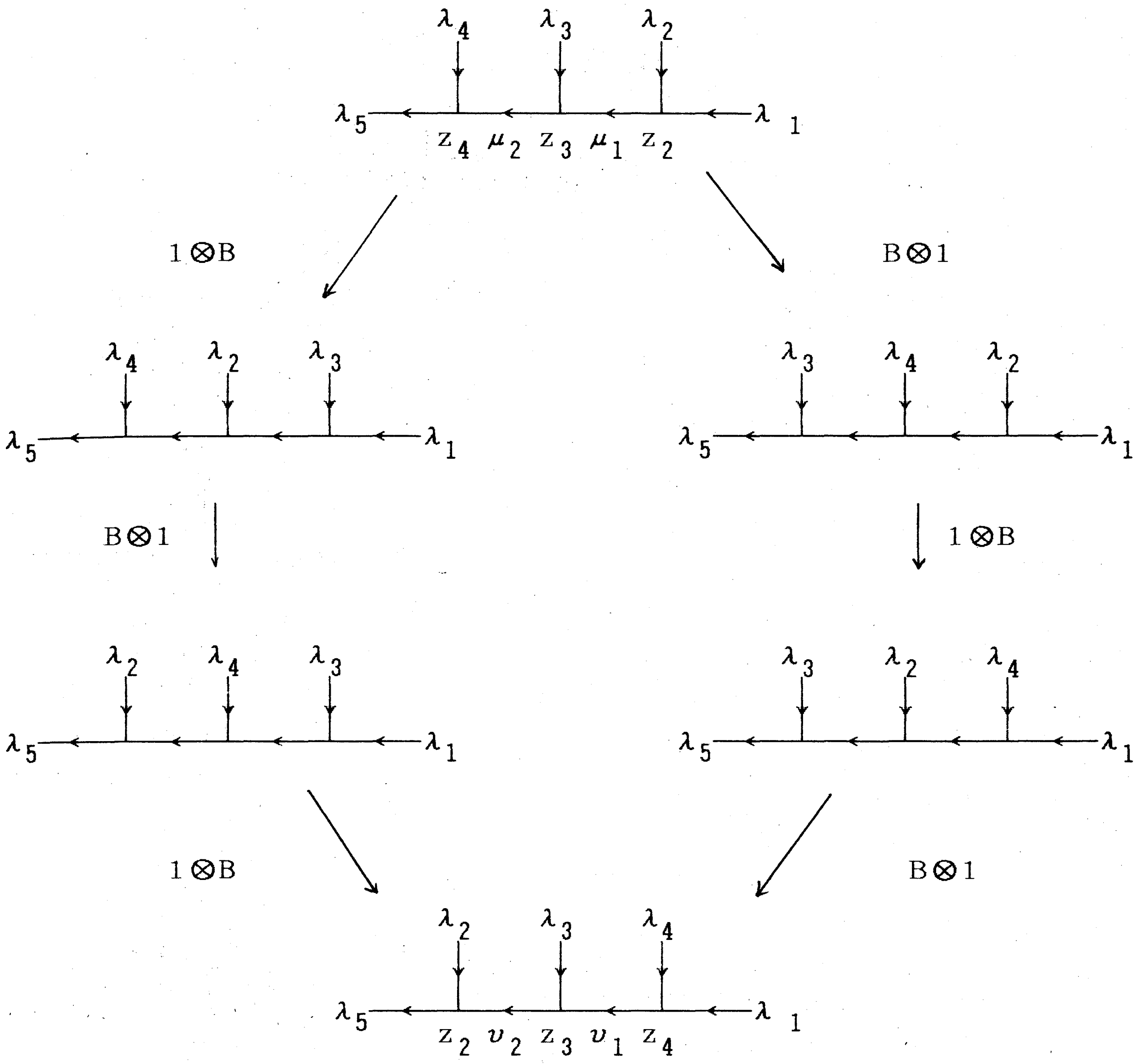
を表わす．

次に，種々の関係式の Feynmann Diagram 表示を説明する．ここでは，Feynmann Diagram といえば，次のような，Vertex および，Vertex をつないだものを言う．ただし，Vertex は，”幅つきグラフ”だと思って，ねじってはいけないが，平面内での回転は許されると考える．

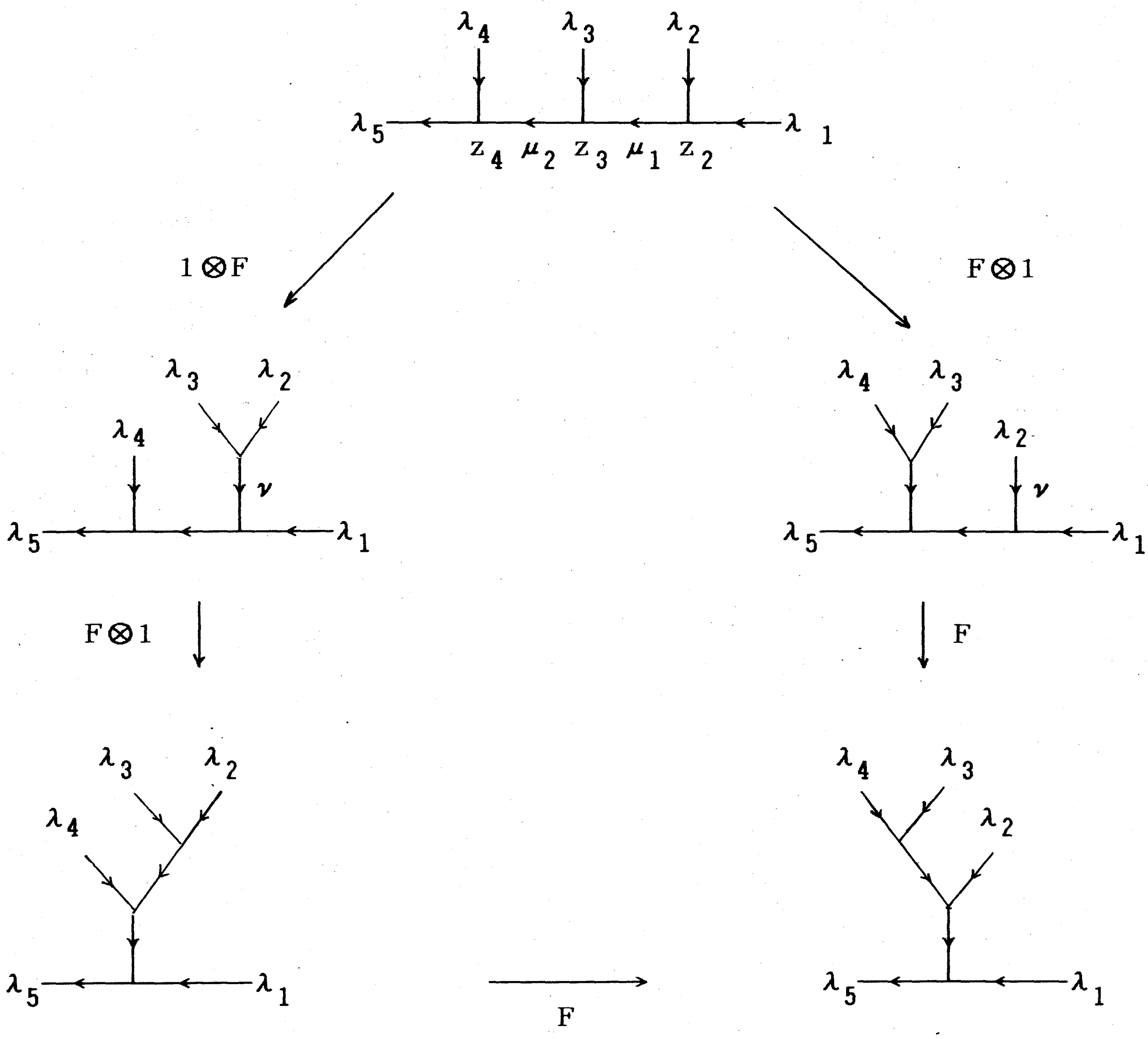


この，Vertex が，初期Termの空間 $W_{\lambda_3}^{\lambda_2\ \lambda_1}$ を表わしているものであると考えて，関係式を書き表す．　また，矢印の向きを変えることは，Wの添え字の上げ下げに相当する．

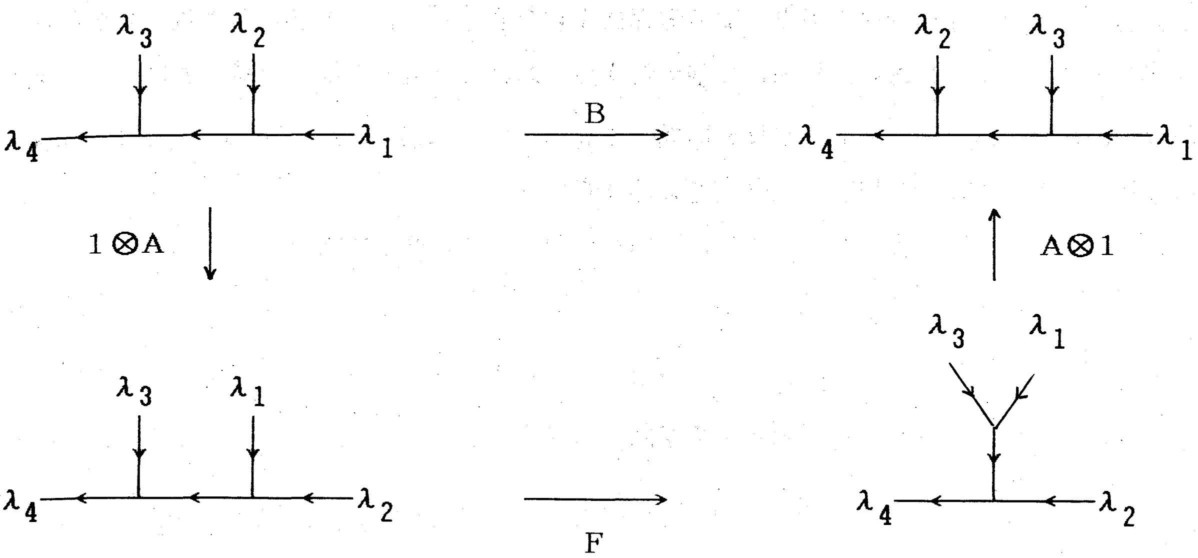
1) Braid Relation



2) Pentagon Relation （Moore-Seiberg が気付いた関係）



3) BとFの関係



3-4　B，Fの求め方

結論をいえば，４点関数の満たす微分方程式を解析する事によって求められる．すなわち，微分方程式の１つの特異点における展開と，他の特異点における展開との間の接続行列になる．典型的にはGauss の超幾何微分方程式の３点接続問題，すなわち，P^1上の３点（０，１，∞）に確定特異点をもつ確定特異点型微分方程式の接続問題に他ならない．

さて，これを実際に実行するためには，いくつかの注意が必要である．

まず，Vertex Operators の積は本来

$$\Phi_3(u_3;z_3)\Phi_2(u_2;z_2):H_{\lambda_1}\longrightarrow H_{\lambda_4}$$

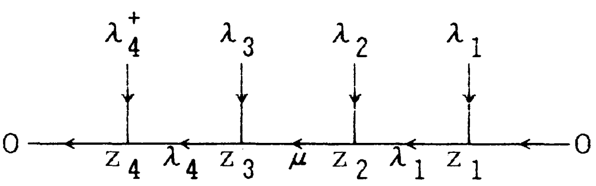
なる Operator であるが，最低固有値の空間への作用

$$(*)\qquad \langle u_4|\Phi_3(u_3;z_3)\Phi_2(u_2;z_2)|u_1\rangle \qquad u_1\in V_{\lambda_1},\ u_4\in V_{\lambda_4^+}$$

が分かれば，$\Phi_3(u_3;z_3)\Phi_2(u_2;z_2)$ の行列要素は定まる．(*)は，z_2，z_3 に関して

$(\mathbb{C}^*)^2-\{z_2=z_3\}$ 上多価正則で，実は z_2/z_3 にしかよらない．

次に，Type



の４点関数

$$\langle\Phi_4(u_4;z_4)\Phi_3(u_3;z_3)\Phi_2(u_2;z_2)\Phi_1(u_1;z_1)\rangle$$

を考える．この関数は，z_1, z_2, z_3, z_4の複比にしかよらない（Conformal Invariance）．すると，Φ_1，Φ_4 がVertex Operators であることから，

$$\lim_{\substack{z_1\to 0\\ z_4\to\infty}} z_4^{2\Delta_{\lambda_4}}\langle\Phi_4(u_4;z_4)\Phi_3(u_3;z_3)\Phi_2(u_2;z_2)\Phi_1(u_1;z_1)\rangle$$

$$=\langle u_4|\Phi_3(u_3;z_3)\Phi_2(u_2;z_2)|u_1\rangle=(*)$$

である．一方，$\langle\Phi_4(u_4;z_4)\Phi_3(u_3;z_3)\Phi_2(u_2;z_2)\Phi_1(u_1;z_1)\rangle$はＫＺ方程式を満たしているから，(*)の満たす微分方程式が得られる．

(*)をz_2, z_3の関数とみてΦと表わし，KZ方程式(Ⅲ)を書き下してみると，

$$\{(1+g)\frac{\partial}{\partial z_2} - \frac{\Omega_{23}}{z_2 - z_3} - \frac{\Omega_{12}}{z_2}\}\Phi = 0$$

$$\{(1+g)\frac{\partial}{\partial z_3} - \frac{\Omega_{23}}{z_3 - z_2} - \frac{\Omega_{31}}{z_3}\}\Phi = 0$$

となる．一方，代数方程式(Ⅳ)も書き下すことができる（［TK］P339）が，ここでは省略する．

次に，変数変換 $(z_2, z_3) \to (\tau = z_2/z_3\ ,\ z_3)$ を行い，τのみに依る部分を取り出せば，

$$\{(1+g)\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\Omega_{23}}{\tau - 1} - \frac{\Omega_{12}}{\tau}\}\Phi = 0$$

なる方程式を得る．これは，P^1上，3点（0，1，∞）に確定特異点をもつ線形微分方程式であり，$\tau = 0$において正規化された解は，Ω_{12}を対角化する．

一方，$\xi = 1/\tau$ と変換すると，

$$\{(1+g)\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\Omega_{23}}{\xi - 1} - \frac{\Omega_{13} + \mathrm{Const}}{\xi}\}\Phi = 0$$

とかける．ここで，$\xi = 0$ (i.e. $\tau = \infty$) において正規化された解は，Ω_{13}を対角化する．

ここで，Braiding とは，$|z_2| < |z_3|$における解を$|z_3| < |z_2|$ に解析接続することであった．これは，$\tau = 0$で正規化された解を，$\tau = \infty$に解析接続することに相当する．従って，Ω_{12}を対角化する解と，Ω_{13}を対角化する解の（固有値の）関係が分かれば，Braiding Matrix B が計算できる．

また，変数変換$(z_2, z_3) \to (\zeta = z_2 - z_3, z_2)$を考えて，ζのみに依る部分を取り出して，微分方程式を得る．$\zeta = 0$ (i.e. $\tau = 1$) において正規化された解は，Ω_{23}を対角化する．そして，Fusion は，$\tau = 0$で正規化された解を，$\tau = 1$に解析接続することに相当する．

文献表

[ＢＰＺ] Belavin,A.A.,Polyakov,A.M.,Zamolodchikov,A.B.:Infinite conformal symmetry in two dimensional quantum field theory. Nucl. Phys. B241,333(1984)

[Ｋ] Kac,V.G.:Infinite dimensional Lie algebras,2nd edition.Cambridge Univ.Press(1985)

[ＫＺ] Knizhnik,V.G.,Zamolodchikov,A.B.:Current algebra and Wess-Zumino model in two dimensions. Nucl. Phys. B247,83(1984)

[ＭＳ] Moore,G.,Seiberg,N:Classical and quantum conformal field theory. Commun. Math. Phys. 123,177(1989)

[ＴＫ] Tsuchiya,A.,Kanie,Y.:Vertex operators in conformal field theory on P^1 and monodromy representations of the braid group. in:Conformal field theory and solvable lattice models. Adv. Stud. Pure Math. 16,297(1988)

[ＴＵＹ] Tsuchiya,A.,Ueno,K.,Yamada,Y.:Conformal field theory on universal family of stable curves with gauge symmetries. to appear in Adv. Stud. Pure Math. 19

付記　このノートを作成するにあたって，黒木玄，長谷川浩司両氏のノートを参考にしました．又，講義をされた土屋先生には，多忙にもかかわらず，原稿に目を通して頂きました．感謝の意を表します．